Von Hühnchen in der Mikrowelle und Mathematikern aus höheren Dimensionen

René Wiegand

Am 25. April 2008 fand die zwölfte Gauß-Vorlesung statt. Thema war der Beweis des russischen Mathematikers Perelman, der mit seinen im Internet veröffentlichten Arbeiten die Geometrisierungs-Vermutung von Thurston und damit als Spezialfall die hundert Jahre alte Poincarésche Vermutung bewiesen hatte. Einer der führenden Experten auf diesem Gebiet, John W. Morgan von der Columbia University, beschrieb die Probleme und die Lösung.

So stellt man sich wohl – zumindest als Mathematiker – den Ausklang einer Arbeitswoche vor. Es ist Freitagnachmittag, einer der ersten warmen Frühlingstage, man hört „My Funny Valentine“ vom Benjamin Himpel Trio im Großen Hörsaal des Mathematischen Instituts der Universität Bonn und erfährt Vergnügliches zu Carl Friedrich Gauß sowie zu Hühnchen in der Mikrowelle und was diese mit der Poincaréschen Vermutung zu tun haben.

Professor Cremers würdigt als Dekan der Fakultät Hans Grauert, dem die Ehrenmitgliedschaft der DMV verliehen werden soll, und dessen Beiträge zur Garbentheorie. Da Professor Grauert erkrankt ist, nimmt seine Tochter die Urkunde von Professor Günter M. Ziegler, dem Präsidenten der DMV, entgegen. Ziegler hält sich kurz in seiner Laudatio und „will nicht die Mathematik nach Bonn tragen“. Er erwähnt Grauerts wichtigen Beitrag zum Oka-Problem, dessen Ergebnisse auf dem Gebiet der komplexen Analysis mehrerer Veränderlichen sowie den Hauptvortrag auf dem internationalen Mathematiker-Kongress von 1962 zum Levischen Problem.

Danach hält Stefan Hildebrandt die historische Einführung. Sein Thema – natürlich zu Gauß – ist *Über die Gauß'sche Preisschrift von 1825*. Dass Mathematik nicht nur aus abstrakten Gleichungen und Lehrsätzen besteht, sondern auch aus den daran beteiligten Personen und Umständen, lernt man bei ihm aufs Vergnüglichste. Er erzählt, wie es zu der Aufgabe kam und wie wohl Gauß selbst sie formuliert hat. Es überrascht dann nicht mehr, dass er später der Preisträger sein sollte. Die Preisaufgabe der Königlichen Societät der Wissenschaft zu Kopenhagen fiel in eine Periode, in der Gauß mit Mathematik eher wenig beschäftigt war. Lediglich zwei Arbeiten sind von ihm zwischen 1820 und 1830 zu verzeichnen. Das Multitalent hatte anderes zu tun: Gauß war nämlich beauftragt worden, das Königreich Hannover zu vermessen. Eine Aufgabe, die ihn voll und ganz ausfüllte und fast an den Rand der Erschöpfung brachte. Man denke nur an die damaligen Reisebedingungen. Wie war es dazu gekommen?

Gauß' Freund und Briefpartner Heinrich Christian Schumacher hatte 1816 vom dänischen König den Auftrag bekommen, geodätische Vermessungen vorzunehmen. Schumacher war damals Professor für Astronomie in Kopenhagen. Später begründete er die Zeitschrift „Astronomische Nachrichten“. Da er von Gauß' Beschäftigungen mit geodätischen Problemen wusste, bat er diesen um Hilfe. Gauß sagte zu und König George IV. von England und Hannover übertrug Gauß die Leitung der Vermessungen.

Angeregt durch seine Ergebnisse berichte Gauß Schumacher von seinen mathematischen Schlussfolgerungen. Dieser schlug daraufhin der Societät die besagte Preisaufgabe vor. Sie lautete, zwei Gebiete so aufeinander abzubilden, dass „die Fläche und ihr Bild in ihren kleinsten Teilen ähnlich sind". Insbesondere musste also die gesuchte Abbildung winkeltreu sein. Es war somit ein Stück der Erdoberfläche – idealisiert als eine Kugeloberfläche – auf ein Stück der euklidischen (d. h. flachen) Ebene abzubilden, sodass die Winkelverhältnisse nicht geändert werden. Gauß bleibt in seiner Lösung vage und gibt keine Begründungen. Er war halt „der alte Fuchs, der die Spuren mit seinem Schwanz verwischt", wie Abel meinte. Modern würden wir sagen, dass Gauß eine konforme Abbildung konstruiert hat. Den Begriff „konform" führte er etwa zwanzig Jahre später selbst ein. Gauß wäre nicht Gauß gewesen, wenn er seine praktischen Arbeiten nicht in eine umfassende mathematische Theorie eingebettet hätte. Krönung seiner Ergebnisse zu den gekrümmten Flächen waren 1827 die *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Die hierin betrachteten Differentialformen sollte später Bernhard Riemann fortführen und daraus seine Räume entwickeln, welche die Mannigfaltigkeiten vorwegnahmen.

Einige wenige Gleichungen schreibt Hildebrandt an, und man erkennt die grundlegenden Begriffe der modernen Differentialgeometrie wie das Flächenelement oder die Gaußsche Krümmung. Hildebrandt schlägt dann noch den Bogen zum Riemannschen Abbildungssatz für einfach zusammenhängende Gebiete, zu Hermann Amandus Schwarz, dem Plateauschen Problem, Verallgemeinerungen von Lichtenstein zu Beginn des 20. Jahrhunderts und moderneren Ergebnissen.

3-Mannigfaltigkeiten sind eine harte Nuss

Nach soviel historischen Ausflügen gibt es noch einmal Musik, bevor Matthias Kreck, Direktor des Bonner *Hausdorff Research Institute for Mathematics*, gut gelaunt auf Englisch den Gastredner vorstellt und in dessen Arbeiten einführt. Dass er Professor John W. Morgan als einen Experten auf dem Gebiet der Mannigfaltigkeiten bezeichnet, „der aus höheren Dimensionen kam", bevor er sich der Prüfung der Arbeiten Perelmans zuwandte, löst großes Gelächter aus. Morgan ist erfreulicherweise alles andere als außerirdisch, sondern vielmehr ein erfrischender Redner. Die amerikanische Art Wissenschaft zu vermitteln, ist auch ihm zu eigen. Schnell gelingt es ihm, den Titel seines Vortrags *The Poincaré Conjecture and the Geometrization of 3-manifolds: Applications of Ricci flow with surgery to the classification of 3-manifolds* kurzweilig zu erhellen.

John W. Morgan (Photo: Jürgen Schulzki)

Die Frage Henri Poincarés von 1904 lautet modern gesprochen: „Ist jede geschlossene einfach zusammenhängende dreidimensionale Mannigfaltigkeit homöomorph zur 3-Sphäre S^3?" Dies würde die S^3 als gewissermaßen einfachste geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit auszeichnen. So leicht die Frage zu formulieren ist, sollte sie sich doch zu einer der schwierigsten Aufgaben der Mathematik des letzten Jahrhunderts entwickeln. Kein Wunder, dass sie zu einem der sieben Milleniumsprobleme erklärt wurde, für deren Lösung jeweils eine Million Dollar ausgelobt wurde. Unzählig sind die vermeintlichen Beweise, die sich stets als fehlerhaft erwiesen. Bis zum Jahr 2002/2003. Da veröffentlicht der russische Mathematiker Perelman drei knapp formulierte Artikel im Internet zum sogenannten Ricci-Fluss.

Nach kurzen Erläuterungen der topologischen Grundbegriffe und wie man sich die 2-Sphäre vorstellen kann, folgen die Klassifikationen der niederdimensionalen Mannigfaltigen. Das analoge Problem in den unteren Dimensionen 1 und 2 ist schnell abgehandelt. In der Dimension 1 gibt nur eine Klasse: die Kreislinie S^1 ist die einzige geschlossene Mannigfaltigkeit. Jede zusammenhängende, geschlossene 2-Mannigfaltigkeit ist entweder zu einer zusammenhängenden Summe von g Sphären (orientierbarer Fall) oder g reellen projektiven Räumen (nicht orientierbarer Fall) homöomorph. Die topologische Invariante g, das Geschlecht, unterscheidet die Flächen eindeutig voneinander. Anschaulich ist es die Anzahl der Henkel, die man an die 2-Sphäre klebt, beziehungsweise der Kreuzhauben, falls die Mannigfaltigkeit nicht orientierbar ist.

Somit ist also in Dimension 2 jede einfach zusammenhängende geschlossene Mannigfaltigkeit homöomorph zur 2-Sphäre S^2. Leider scheitert die entsprechende Vermutung für die Dimension 4. Man weiß, dass geschlossene, einfach zusammenhängende 4-Mannigfaltigkeiten existieren, die nicht homöomorph zur 4-Sphäre sind. Indem man aber eine kleine Ergänzung hinzunimmt, kann man die sogenannte erweiterte Poincaré-Vermutung formulieren: „Jede geschlossene n-dimensionale Mannigfaltigkeit, die homotopieäquivalent zur n-Sphäre ist, ist bereits (d. h. bis auf Homöomorphie) gleich der n-Sphäre." Dieses Problem konnte Smale 1960 bis hinab zur Dimension fünf lösen. 1982 gelang Freedman die Lösung für die Dimension vier. Der Fall der Dimension drei stellte sich als der schwerste heraus. Bedeutende Ergebnisse wurden in den 1970er-Jahren erzielt, als William P. Thurston seine Geometrisierungs-Vermutung aufstellte. Diese hatte unter anderem zur Folge, dass sich aus ihrer Gültigkeit die Poincaré-Vermutung als Spezialfall ergab. Man erkannte, dass die Aufgabe darin bestand, eine passende Metrik zu finden. Dies erwies sich als keineswegs trivial. Richard Hamilton war derjenige, der dies mit der Ricci-Metrik löste. Er definierte eine Metrik positiver Krümmung und ließ diese sich entwickeln – der Ricci-Fluss, eine einparametrige Familie Riemannscher Metriken, die die Ricci-Gleichung (eine parabolische partielle Differentialgleichung) erfüllt – und schaute nach, was geschah. Seine von ihm vorgeschlagene Gleichung für den Ricci-Fluss erinnert an eine Wärmeleitungsgleichung.

Es erwies sich als wichtig, die Entwicklung (in der Zeit) des Ricci-Flusses zu kontrollieren, ohne dabei Voraussetzungen an die Krümmung der Anfangsmetrik zu machen. Leider traten hierbei immer wieder Singularitäten auf, die einem das Leben schwer machten. Perelmans Leistung war es nun, diese Singularitäten in den Griff zu kriegen. Er war quasi der Arzt – das „surgery" (Chirurgie) im Titel des Vortrags –, der die problematischen Stellen wegschnitt, ohne dabei die wesentliche Struktur der Mannigfaltigkeit zu verändern. Die technischen Details seines Beweises sind allerdings alles andere als einfach.

Morgan gehört zu jenen Experten, die die schwierige Aufgabe lösten, die knappen Beweisschritte Perelmans nachzuvollziehen, auf deren Richtigkeit hin zu prüfen und zu ergänzen. Entstanden ist hieraus ein umfangreiches Buch in Zusammenarbeit mit Gang Tian. Das erstaunliche Ergebnis war unter anderem, dass eine rein topologische Fragestellung mit Methoden der Differentialgeometrie, partiellen Differentialgleichungen und der Analysis gelöst wurde.

Wie man eine gute Metrik findet, beschreibt Morgan nun recht anschaulich: Man nehme ein Hühnchen, stecke es in die Mikrowelle und schaue nach einer gewissen Zeit nach, ob es schon gut ist, damit es nicht explodiert. Dann gehe man hin und schneide ein wenig ab. – Das ist der chirurgische Teil. Wieder stecke man das Hühnchen in die Mikrowelle und backe es weiter. Das wiederhole man, bis das Hühnchen gar ist. Jetzt muss man nur noch die Analogie zurückübersetzen. Die Metrik ist schließlich passend „hingebogen", womit die Geometrisierungs-Vermutung und somit auch Poincarés Vermutung bewiesen ist. Wenn Mathematik doch immer so einfach und anschaulich wäre ...

John W. Morgan (Photo: Jürgen Schulzki)

Als Abschluss folgt die Einladung in die Bibliothek, in der viele Weinflaschen und allerlei Essen bereitstehen. Auch kaltes Hühnchen auf Brot.

Adresse des Autors
Dipl.-Math. René Wiegand
Andreasstraße 2
53179 Bonn
info@wiegand-dokumentation.de

Die nächste Gauß-Vorlesung findet am 14. November in Hamburg statt.