Sechsmal zu den Wurzeln der Weisheit

MATHEMATIK Beweise sind alles. Sie bringen Klarheit, Ruhm und manchmal auch Geld. Doch die größte Faszination liegt darin, wie kompliziert es sein kann, scheinbar einfache Fragen zu lösen. **René Wiegand** präsentiert berühmte Beispiele

Der Spruch „Quod erat demonstrandum – was zu beweisen war" hat Millionen von Schülern vieler Generationen verfolgt. Gut waren sie nur auf ihn zu sprechen, wenn ihnen ein Beweis gelungen war, etwa zur Fläche einer Raute oder zur Winkelsumme im Dreieck, die stets 180 Grad beträgt – was freilich für das Dreieck auf einer Kugel nicht stimmt. Für Mathematiker sind das Kleinigkeiten. Viele brüten über ganz anderen Beweisen, die öffentlich nur bei spektakulären Fällen bekannt werden und von völlig anderer Art als in der Justiz sind.

Die oft gehörte Frage „Mathematik – ist denn da nicht schon alles berechnet?" zeigt, wie wenig von der mathematischen Forschung in die Öffentlichkeit gelangt. Das hat damit zu tun, dass ihre Experten anders als etwa Archäologen und Astronomen nur selten etwas vorzeigen können. Es wird nichts ausgegraben, nichts errichtet, nichts präsentiert. Zumindest nichts, was gleich zu begreifen ist. Es sind Aussagen auf dem Papier, verbunden durch unverständliche Symbole.

Wollte man hier zum Beispiel erklären, worum es in der Hodge-Vermutung geht, die Untervarietäten einer projektiv algebraischen Mannigfaltigkeit betrifft, so wäre jeder Versuch ohne langes Mathe-Studium zum Scheitern verurteilt. Wir versuchen es hier etwas leichter. Das ist noch schwer genug, gleichwohl aber reizvoll.

1 *Strategie gegen die Pest*

Im Altertum stand auf der heutigen Touristeninsel Delos im Ägäischen Meer ein berühmtes Heiligtum: das Orakel und dazu der Altar des Apollo, der als Würfel gestaltet war. Als in Delos die Pest ausbrach und die Bewohner sich an das Orakel wandten, wurde ihnen aufgetragen, einen Würfel von genau doppelt so großem Volumen im Vergleich zu ihrem Altar zu fertigen; so könnten sie ihrem tödlichen Schicksal entgehen. Das war doch zu schaffen, oder? Damit war ein klassisches Rätsel der Mathematik geboren.

Hätte das Orakel zudem die Bedingung gestellt, die Aufgabe dürfe nur geometrisch konstruiert, also mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden, hätten die Leute von Delos vergeblich auf Rettung gewartet. Denn diese Aufgabe ist nicht lösbar. Lineal meint dabei lediglich eine Kante, mit der sich gerade Linien ziehen lassen. Es hat keinen Maßstab, um damit etwas zu messen.

Die Zahl ergibt sich rechnerisch aus ihrer geometrischen Konstruktion, also der Länge der konstruierten Strecke. Erst 1837 folgte dafür der exakte Beweis durch den jungen Franzosen Pierre Laurent Wantzel: Die dritte Wurzel aus 2, wie wir die rechnerische Lösung heutzutage nennen, ist nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Die Griechen hatten schon Probleme bei der normalen Quadratwurzel. Dabei ergeben sich nämlich Zahlen, die nicht als Resultat von Brüchen natürlicher Zahlen wie 1, 2 und so weiter darstellbar sind. Das einfachste Beispiel einer solchen Zahl ist die Länge der Diagonale in einem Quadrat, dessen Seiten die Länge 1 haben: Sie hat die Länge der Wurzel aus 2. Für die Griechen war dies eine mysteriöse Größe, auch weil sich dabei, wie wir heute wissen, unendlich viele Dezimalstellen ergeben.

Das Delische Problem der Verdopplung des Würfelvolumens ist eines der drei klassischen mathematischen Probleme; die anderen sind die Quadratur des Kreises und die Dreiteilung des Winkels. Sie riefen später ungezählte Profi- und Hobbymathematiker auf den Plan. Stets versuchten sie eine Lösung, obwohl man schon lange weiß, dass sie unmöglich ist. Die genaue Aufgabe mit der Nebenbedingung, sie mit Zirkel und Lineal zu lösen, war den vermeintlichen Genies nicht klarzumachen. Noch heute gibt es Abhandlungen, nach denen den Autoren die Quadratur des Kreises gelungen sein soll.

2 *Lösung nach 300 Jahren*

Im Gegensatz zu den Griechen waren die Römer an solchen kniffligen Problemen kaum interessiert; sie hinterließen keine bedeutenden Ergebnisse. Erst vom 16. Jahrhundert an wurde das anders, etwa in Frankreich. Oft waren es adlige Amateure – professionelle Mathematiker waren noch selten –, die Gedankenspiele trieben. Ein Problem aus dem 17. Jahrhundert sollte sehr berühmt und erst vor einigen Jahren gelöst werden. Der Franzose Pierre de Fermat, von Beruf Richter, fragte sich, ob es ähnlich wie bei den pythagoräischen Zahlentripeln entsprechende Lösungen auch für größere Exponenten gibt.

Was heißt das? Man versteht darunter drei ganze Zahlen, oft etwa mit a, b, c bezeichnet, die für die Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck stehen und den Satz des Pythagoras erfüllen. Meist kennt man aus der Schule nur noch die Regel $a^2+b^2=c^2$ (oder zum Beispiel $3^2+4^2=5^2$) für die Seiten beziehungsweise die Quadrate über diesen Seiten, ohne zu wissen, wofür die Buchstaben stehen, nämlich für die drei Seiten.

Fermat fragte sich, ob es möglich sei, zwei Würfel mit ganzzahligen Seitenlängen zu finden, die in der Summe ihrer Volumina wieder einen Würfel mit ganzzahligen Seitenlängen ergeben. Mathematisch heißt das: Gibt es drei ganze Zahlen a, b und c, sodass für diese $a^3+b^3=c^3$ gilt? Trotz intensiven Suchens konnte Fermat keine passenden Zahlen finden. Ebenso erging es ihm, wenn er statt der Exponenten (hier also 2 und 3) beliebige natürliche Zahlen wie 4, 5 und so weiter nahm.

Nie ging die Gleichung auf. Er vermutete, dass für alle Exponenten n größer als 2 die Gleichung $a^n+b^n=c^n$ keine ganzzahlige Lösung hat. Wie aber war das zu beweisen?

Diese so leicht formulierte Aufgabe wurde eine der größten mathematischen Herausforderungen. 1908 setzte der Industrielle Paul Wolfskehl einen hohen Geldpreis – 100 000 Goldmark – für den korrekten Beweis aus. Prompt kam es zu Hunderten von Beweisversuchen. Doch erst 1995 gelang dem Engländer Andrew Wiles der Nachweis der Fermatschen Vermutung.

Wiles hatte sich viele Jahre für die Arbeit an dieser Aufgabe zurückgezogen, aber niemandem davon berichtet. Offenbar fürchtete er, von seinen Kollegen nicht mehr ernst genommen zu werden, waren doch schon viele vermeintliche Beweise publiziert worden, oft sogar durch Leute vom Fach, begleitet von Meldungen in Laienmedien.

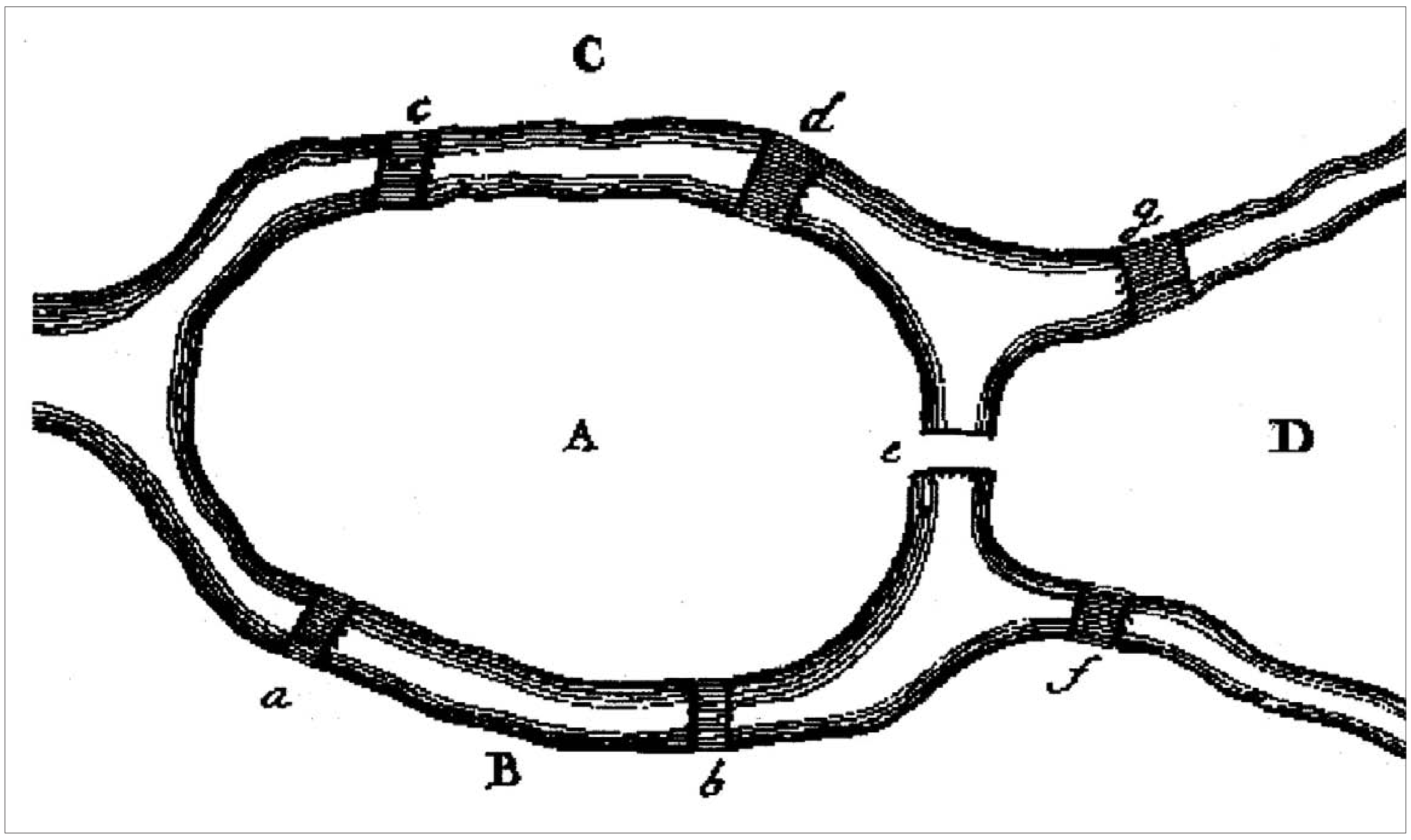
Wollte man Wiles' Beweis der Fermatschen Vermutung einem Laien erklären, so würde der mit all den Formeln, Theorien und Sätzen nicht zurechtkommen. Selbst für die meisten Mathematiker ist er nicht nachvollziehbar und fordert ein immenses Hintergrundwissen.

3 *Wie oft über sieben Brücken?*

Leonhard Euler, der große Mathematikus aus Basel, geboren vor 300 Jahren, löste viele Rätsel seines Faches, auch das berühmte Königsberger Brückenproblem. Ist es möglich, so seine Frage, alle sieben Brücken, die in Königsberg über den Fluss Pregel führen, bei einem Rundweg nur einmal zu überqueren *(siehe Abbildung oben)*?

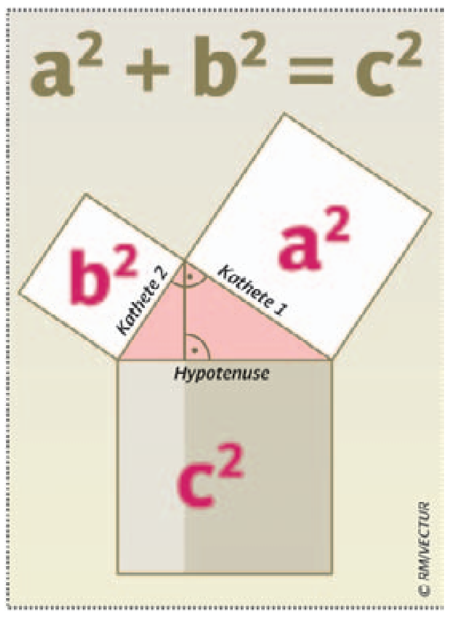
Euler bewies durch das Abzählen der Wege, die sich an den Brücken treffen, dass das unmöglich ist – mindestens über eine Brücke muss man zweimal gehen. Er erkannte, dass ein Rundweg der gesuchten Aufgabenstellung dann möglich ist, wenn sich an keinem der Ufer eine ungerade Zahl von Brücken befindet. Da aber zu allen vier Stadtteilen von Königsberg eine ungerade Zahl von Brücken führte, war der gesuchte Rundweg nicht möglich.

Allerdings galt ihm die Aufgabe noch nicht als echtes mathematisches Problem. Seine Herangehensweise und Abstraktionsgabe sollten später einen der bedeutendsten Zweige der modernen Mathematik begründen: die Lehre von der Lage, die Topologie. Ohne sie sind Optimierungsaufgaben zu Streckenberechnungen kaum lösbar.



Knifflige Frage: Der Pregel in Königsberg und seine sieben Brücken, bezeichnet von a bis g. Ist es möglich, jede davon bei einem Rundgang nur einmal zu überschreiten? FOTO: RM

Sinn für Probleme: Pierre de Fermat (1601-1665). FOTO: -PICTURE-ALLIANCE



Klassiker: Der Satz des Pythagoras gilt für alle rechtwinkligen Dreiecke in der Ebene.

Gut gelagert: Computer wissen, wie und warum Obst optimal liegt. FOTO: ISTOCKPHOTO.COM

4 *Der Fall ist immer noch offen*

Ein Freund Eulers, der Königsberger Christian Goldbach (1690-1764), ein Erzieher des späteren Zaren Peter II., ist der Namensgeber eines der ältesten Probleme, die bis heute nicht geklärt sind. Es hat mit Primzahlen zu tun. Goldbachs Annahme, dass sich jede gerade Zahl, die größer als zwei ist, als Summe zweier Primzahlen schreiben lässt (beispielsweise 8=3+5, 34=11+23, 300=101+199), konnte noch immer nicht bewiesen werden.

Allerdings konnte auch noch niemand eine Zahl angeben, für die sich nicht zwei geeignete Primzahlen als Summanden finden ließen. Ernsthaft zweifelt aber niemand an der Goldbachschen Vermutung. Auch hier hat es in den letzten Jahrzehnten erstaunliche Teilresultate gegeben, die schon für sich gesehen bemerkenswert sind.

Goldbachs Vermutung gehört zur Klasse der „netten" Probleme. Eine ebenso unbeantwortete Frage ist das Primzahlzwillingsproblem: Gibt es unendlich viele Primzahlpaare (so wie 3 und 5, 17 und 19), die sich in der Differenz um den Wert zwei unterscheiden?

5 *Keine Lust auf Medienrummel*

Für die Lösung mancher Aufgaben werden hohe Summen ausgesetzt. Dass das aber nicht der Antrieb wahrer Mathematiker ist, zeigt der Russe Grigori Perelman, der 2006 mit der Fields-Medaille ausgezeichnet werden sollte. Er gehört aber zu den wenigen Menschen, denen Ruhm und Auszeichnung nichts bedeuten.

Er lehnte diese Medaille ab, die oft als Nobelpreis für Mathematik bezeichnet wird. Seine Arbeiten zur Poincaréschen Vermutung, die er ausschließlich im Internet veröffentlicht hatte, beendeten eines der größten Probleme der letzten hundert Jahre; auch außerhalb von Fachzeitschriften hat es sehr viel Aufmerksamkeit erregt.

Die im Jahr 2000 vom Clay Mathematics Institute, der Stiftung eines reichen Amerikaners, ausgesetzte Belohnung von einer Million Dollar je Problem mag viel dazu beigetragen haben. Als eines von sieben sogenannten Millennium-Problemen ist es das erste, das heute als gelöst gilt. Freilich ist die Zahl bedeutender Fragen nicht zu beziffern. Jede Auswahl bleibt individuell und rudimentär. Wer würde bei mehr als 5000 Teilgebieten, die die internationale mathematische Klassifikation kennt, die ungelösten Fragen seines Gebietes nicht bedeutend nennen?

Der Autor dieses Beitrags erlebte einmal einen Mann, der ihn anrief und nach der Adresse des Clay Institute fragte; er glaubte, eine Lösung für das Poincarésche Problem gefunden zu haben. Die bisherigen Versuche seien daran gescheitert, sagte er, dass man das Thema nicht philosophisch angegangen sei. Offenbar hatte er hier etwas missverstanden, sind doch die Sphären der Mathematiker, die bei Poincarés Vermutung auftreten, völlig andere als die der Philosophen. Poincarés zweidimensionale Sphäre ist schlicht die Oberfläche einer Kugel; mit philosophischen Sphären hat dies nichts zu tun.

6 *Wenn Obst Platz sparen soll*

Eine neue Form mathematischer Probleme und ihrer Lösungsstrategien ergab und ergibt sich durch immer leistungsfähigere Computer. So hatte 1998 ein US-Mathematiker einen computerbasierten „Beweis", 250 Seiten lang, für die Keplersche Vermutung geliefert. Sie ist jedem Obsthändler vertraut: Wie lassen sich Kugeln (in Form etwa von Orangen und Äpfeln) am platzsparendsten stapeln, sodass zwischen den Früchten am wenigsten Luft bleibt?

Die vermutete Lösung ist die am nächsten liegende. Man lege vier Kugeln in Form eines Quadrates nebeneinander und lege die nächste Kugel in die Mitte des von den vier Kugeln gebildeten Loches; so fahre man fort. Allerdings ist der Beweisgang dazu noch nicht allgemein anerkannt.

Für den ebenen Fall konnte 1910 der Norweger Axel Thue auf einfache Weise zeigen, dass die dichteste Anordnung gleich großer Kreise in der Ebene, die sich natürlich nicht schneiden dürfen, in Form eines Sechsecks besteht – wie bei Honigwaben.

Auch ein anderer Beweis, der mithilfe eines Computers geführt wurde, ist umstritten. Beim Vierfarbensatz – er behauptet, dass man jede beliebige Landkarte mit nur vier Farben färben kann, ohne dass zwei benachbarte Länder in der gleichen Farbe eingefärbt werden – gingen Experten daran, das Problem in viele Tausende Einzelfälle zu zerlegen. Dann ließen sie sich das Ergebnis per Computer bestätigen. Wegen der schieren Menge an Fällen ist es aber für kaum einen Mathematiker mehr möglich, die vom Computer berechneten Einzelfälle zu prüfen.

***René Wiegand** ist Diplom-Mathematiker und arbeitet im Softwarebereich als technischer Redakteur für Sachbuchverlage.*

BÜCHER, DIE LUST AUF ZAHLEN MACHEN

Mathematik ist nicht gefragt, sie interessiert niemanden? Der Buchmarkt beweist seit langem das Gegenteil. Die Zahl der Titel etwa zu schwierigen und kuriosen Aufgaben ist groß. Besonders erfolgreich war dabei **Simon Singhs** Buch „Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels" (dtv, 364 Seiten, 10 Euro). Ebenso empfehlenswert sind die beiden rororo-Taschenbücher „Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze" und „Die Top Seven der mathematischen Vermutungen" von **Pierre Basieux** (jeweils 160 Seiten, 8,90 Euro).
Bei Rowohlt ist auch **John D. Barrows** fast formelfreie Darstellung „Ein Himmel voller Zahlen" erschienen (496 Seiten, 10,50 Euro). Von dem Journalisten George G. Szpiro stammt das Buch „Mathematik für Sonntagmorgen" aus dem Verlag der Neuen Zürcher Zeitung (240 Seiten, 25 Euro).
Eine „Einstiegshilfe für Studierende", die die Brücke zwischen Abitur und ersten Semestern schlägt, will **Yára Deterts** „Mathematik für Ahnungslose" sein (Hirzel Verlag, 239 Seiten, 28 Euro).
Piper bietet diese gelungenen Titel: „Einmal sechs Richtige und andere Mathe-Wunder" (256 Seiten, 19,90 Euro) von **Albrecht Beutelspacher**, dem Begründer des Gießener Mathematik-Museums, und die Darstellung des Astrophysikers **Rudolf Kippenhahn** „Eins, zwei, drei . . . unendlich. Eine Reise an die Grenzen der Mathematik" (256 Seiten, 18 Euro). Ende August wird bei Booklet „Der Mathematik-Verführer" erscheinen, den der Journalist **Christoph Drösser** geschrieben hat (zirka 200 Seiten, 17,90 Euro). **E. K. R.**